KOLOKWIUM, TOPOLOGIA I, 04.12.23.

UWAGA: Rozwiązanie każdego zadania należy napisać na oddzielnej kartce. Każdą kartkę z rozwiązaniami należy podpisać podając imię i nazwisko, numer indeksu oraz numer grupy lub nazwisko prowadzącego ćwiczenia. **Dla wszystkich odpowiedzi należy podać uzasadnienie.**

1. Znaleźć domknięcie zbiorów:

(A)

$$A = (1,2] \times (1,2] \subset R^2$$

w przestrzeni $(R^2, \tau(d_r))$,$(R^2, \tau(d_k))$, gdzie $\tau(d_r)$ oznacza topologię na płaszczyźnie R^2 generowaną przez metrykę "rzeka" a $\tau(d_k)$ oznacza topologię na płaszczyźnie R^2 generowaną przez metrykę "kolejową".

(B)

$$B = A \cap (Q \times Q)$$

w tych samych przestrzeniach, gdzie Q oznacza zbiór liczb wymiernych..

2. Niech $\tau(d_k)$ i $\tau(d_r)$ będą topologiami opisanymi w poprzednim zadaniu. Niech τ_K oznacza topologię kwadratu leksykograficznego $K = [0,1] \times [0,1]$.

(A) Niech $f : (R^2, \tau(d_k) \to (R^2, \tau(d_r))$ będzie przekształceniem określonym formułą

$$f((x,y)) = (x-y, x-y).$$

Dla $p = (1,1) \in R^2$, $q = (1,-1) \in R^2$ sprawdź ciagłość odwzorowania f w punktach p i q.

(B) Niech $\Delta_1 = \{(s,s) \in K | s \in [0,1]\}$ a $\Delta_2 = \{(s, 1-s) \in K \mid s \in [0,1]\}$ Sprawdź, czy przekształcenie $f : \Delta_1 \to \Delta_2$ określone wzorem $f((s,s)) = (s, 1-s)$ jest homeomorfizmem, gdy na Δ_1 i Δ_2 mamy topologię otrzymaną z obcięcia topologii τ_K do podprzestrzeni.

3. Rozważmy zbiór $X = \{x \in \mathbb{Z} \colon x \geq 2\}$. Dla każdego $n \in X$ definiujemy zbiór $U_n = \{x \in X \mid x \text{ dzieli n}\}$.

a. Sprawdź, że dla $m \neq n$ i $x \in U_n \cap U_m$ istnieje k takie, że

$$x \in U_k \subset (U_m \cap U_n).$$

Niech $\mathcal{T}$ będzie topologią generowaną przez bazę $\mathcal{B} = \{U_n \mid n \in X\}$.

b. Pokaż, że przestrzeń topologiczna $(X, \mathcal{T})$ nie jest Hausdorffa.

c. Pokaż, że zbiór liczb pierwszych jest gęstym podzbiorem przestrzeni $(X, \mathcal{T})$.

d. Dla każdego $x \in X$ znajdź domknięcie w $(X, \mathcal{T})$ zbioru $\{x\}$.

4. Udowodnij, że zwarta przestrzeń metryczna (X, d) ma przeliczalną bazę.